



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN790: MODELOS ESTOCÁSTICOS EN SISTEMAS DE INGENIERÍA
Repaso de Probabilidades

Mario Guajardo Daniel Yung
Agosto, 2005.

1. Problemas de Probabilidades

1. (*) Demuestre que la distribución de probabilidad exponencial tiene pérdida de memoria.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

2. (*) Encuentre la distribución de probabilidad de una variable aleatoria que es la suma de variables aleatorias que siguen distribuciones de Poisson independientes.
3. (*) Demuestre que si:

$$t_1 \longrightarrow \exp(\lambda)$$

$$t_2 \longrightarrow \exp(\mu)$$

Se tiene que:

$$Pr[t_1 < t_2] = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

4. (*) Sean $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ Variables aleatorias iid. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria:

$$X \longrightarrow \min(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

5. (*) Suponga un banco con 2 cajas, con una fila única. La atención en cada una de ellas, se distribuye según distribuciones exponenciales de parámetro λ_1 y λ_2 , respectivamente. Si actualmente hay un cliente en cada caja, la cola está vacía y el banco ya cerró sus puertas, ¿Cuál es la distribución del tiempo transcurrido hasta que termina la atención del primer cliente que se va del banco?.
6. (*) Considere una particular definición a penales de un partido de fútbol que terminó sin goles en su tiempo reglamentario. Al finalizar el partido se instala un gran biombo en la mitad de la cancha y cada equipo lanza los penales en arcos distintos sin saber qué pasa al otro lado. Cada jugador del equipo A convierte un penal con probabilidad p , independiente de todo lo demás. Por su parte un jugador del equipo B anota con probabilidad q , también independiente. Si cada equipo lanza 5 penales ¿Cuál es la probabilidad de que la serie termine con un triunfo para el equipo B por 4 goles a 3?.
7. (*) En un estación del Metro, el tiempo entre las llegadas de los pasajeros se distribuye según una $\exp(\mu)$. Por otro lado el tiempo entre llegadas de los trenes, sigue una $\exp(\lambda)$. Suponga que en este momento, no hay ningún pasajero en la estación, dado que el último tren acaba de pasar ¿Cuál es la probabilidad de que en el próximo metro suban k personas?.
Hint: Suponga que el tren llega vacío y su capacidad es tal, que todos los pasajeros esperando pueden abordarlo.
8. (*) En una lejana Facultad de Ingeniería una fracción p de los alumnos son hombres, y el resto mujeres. Además una fracción t de los hombres ha reprobado a lo menos un ramo. Por su parte una fracción r de las mujeres también ha perdido el invicto. Si se escoge un estudiante al azar y resulta no estar invicto ¿Cuál es la probabilidad que sea hombre?.
9. (*) Una secretaria ha escrito n cartas con sus respectivos n sobres. Luego se pone al azar las cartas en cualquier sobre, determine la probabilidad P_n que al menos una de las cartas quede en el sobre correspondiente.

10. (*) Suponga que tiene 3 naipes de idéntica forma, pero diferentes colores. La primera carta es roja por ambos lados, la segunda tiene un lado rojo y el otro negro y la tercera es negra por ambas caras. Se mezclan las cartas en una bolsa y se extrae aleatoriamente una, pudiéndose observar el color de sólo uno de sus lados. Si la cara que observamos es roja, ¿cuál es la probabilidad que el otro lado sea negro?.
11. (*) En una prueba de selección múltiple los alumnos pueden contestar sabiendo o tratando de adivinar. Supongamos que un alumno conoce la respuesta con una probabilidad p , de manera que si no sabe intentará adivinar lo que ocurre con probabilidad $(1 - p)$. Si el alumno está adivinando la respuesta, tiene una probabilidad $1/m$ de tenerla correcta, donde m son el número de alternativas. ¿Cuál es la probabilidad que un alumno haya sabido la respuesta de una pregunta contestada correctamente?.
12. (*) Se dice que la variable aleatoria de valores positivos X sigue una distribución lognormal de parámetros μ y σ^2 si:

$$\log(X) \longrightarrow N(\mu, \sigma^2)$$

Calcule la esperanza y la varianza de una variable aleatoria con distribución lognormal.

Hint: Le puede ahorrar cálculos saber que la función generadora de momentos de una v.a. con distribución Normal de media μ y varianza σ^2 está dada por $\Psi(v) = \exp\{\frac{\sigma^2 v^2}{2} + \mu \cdot v\}$

13. (*) Un ex deportista instaló un negocio de arriendo de veleros, comprando tres veleros idénticos. Éstos se arriendan por días enteros (desde la mañana hasta el atardecer). Un velero presenta una probabilidad p de fallar en un día de operación cualquiera, independiente de cuántos días lleve operando y de lo que ocurra con los demás veleros. En caso de falla la reparación del velero debe realizarse durante la noche, pero la capacidad es de sólo un velero por noche (existe sólo un mecánico que trabaja en las noches y se demora toda la noche en repararlo)
- Si un día cualquiera por la mañana están operando correctamente los tres veleros, ¿Cuál es la probabilidad que al día siguiente estén los tres operando?.
 - Si un día cualquiera por la mañana están operando correctamente dos, ¿Cuál es la probabilidad que al día siguiente sólo se disponga de un velero?.
 - Suponga ahora que se dispone de N veleros y que la capacidad de reparación es de C veleros por noche (C mecánicos). Si un día cualquiera por la mañana están operando correctamente los N veleros, ¿Cuál es la probabilidad que al día siguiente sólo se disponga de X veleros? ($0 \leq X \leq N$)
14. (*) Considere una oficina de correos con dos ventanillas de atención. Cuando usted llega, encuentra que hay 2 personas atendándose, una en cada ventanilla. La atención en la primera ventanilla demora un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro λ , mientras la atención en la segunda ventanilla toma un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro μ ($\lambda > \mu$)
- ¿En cuál ventanilla se colocaría?.
 - ¿Cuál es la probabilidad que usted sea el último en irse de la oficina?.
 - ¿Suponga ahora que cuando usted llega descubre que hay 2 personas en la fila frente a la primera ventanilla y sólo una persona en la segunda ventanilla. Sin pensarlo, usted se pone en la fila más corta. ¿Cuál es la probabilidad que usted sea último en irse de la oficina?.

Hint: Suponga que una vez que elige una fila no puede cambiarse.

15. (*) Usted se encuentra dando una prueba de su ramo preferido el cual está siendo cuidado por dos ayudantes. El primer ayudante dice la verdad $3/4$ de las veces. Por su parte el segundo de los ayudantes dice la verdad $4/5$ de las veces. La pregunta a una pregunta particular tiene 9 alternativas, y usted

no sabe cuál es la respuesta correcta (pero los ayudantes sí la conocen). Por esto, usted ha decidido preguntarle a los 2 ayudantes su opinión respecto a la alternativa correcta.

Si ambos afirman que la alternativa correcta es la (d), ¿Cuál es la probabilidad que efectivamente esa sea la respuesta correcta a la pregunta (es decir, que ambos ayudantes estén diciendo la verdad)?.

Hint: La probabilidad a priori que cualquiera de las alternativas sea la correcta es $1/9$

16. (*) En el aislado pueblo de Gorepani viven N habitantes. En los próximos días el equipo local se juega la posibilidad de clasificar al campeonato nacional de basketball en un trascendental partido. Las posibilidades de clasificación no son muchas, por lo cual, la decisión del precio p a cobrar por cada entrada al espectáculo no es trivial. Si se cobra un precio muy alto, poca gente podría acudir al espectáculo.

Según estimaciones realizadas con antecedentes históricos, se sabe que si se cobra un precio p por la entrada, entonces un individuo cualquiera del pueblo, independiente de todo lo demás, acude con probabilidad e^{-p} al estadio. Esta probabilidad es la misma para todos los pobladores del pueblo. Suponga que la capacidad del estadio es mayor a N , es decir, cabe toda la gente del pueblo dentro de él. Además, sólo gente del pueblo acude al estadio.

- ¿Qué pasa si se cobra un precio cero (gratis) por la entrada?. ¿Y si se cobra un precio muy grande?. Explique el trade-off involucrado en el problema.
- ¿Si se cobra un precio p por la entrada al estadio, ¿Cuál es la probabilidad que asistan k personas al estadio?.
- ¿Cuál es el valor esperado del ingreso monetario, si se cobra un precio p ?
- ¿Qué precio se debe cobrar si se desea maximizar el valor esperado del ingreso monetario?. ¿Cuál es el ingreso monetario esperado máximo?.

17. (*) Considere una carrera de la Fórmula Pindy en la cual compiten C pilotos de diferentes escuderías. En cada una de las V vueltas de la carrera, un piloto independiente de todo lo demás, con probabilidad q_1 puede tener un accidente y quedar fuera de competencia. Esta probabilidad es la misma para todos los pilotos, excepto para nuestro querido Feliceo Baltazar, para el cual se tiene probabilidad q_2 , con $q_2 > q_1$.

Si un piloto logra terminar la carrera, el tiempo que transcurre desde que parte, en la primera vuelta, hasta que cruza la meta, en la vuelta V , se distribuye según una variable aleatoria exponencial de tasa μ para Feliceo, y variables aleatorias exponenciales iid de tasa λ para el resto de los conductores.

Por el solo hecho de que Baltazar termine la carrera, la escudería recibe $T[\$]$, y si gana recibe adicionalmente $W[\$]$. Por otra parte, si nuestro piloto no termina la carrera la escudería debe pagar a la organización $R[\$]$.

La intención de esta pregunta es encontrar el valor esperado de los beneficios que reporta a la escudería A.J. Floppy contar con los servicios del experimentado Feliceo. Para ello responda las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un piloto en particular logre dar más de k vueltas sin chocar? ¿Cuál es la probabilidad de que termine la carrera? (trabaje en términos de un q genérico).
- Sin considerar a Feliceo, ¿Cuál es la probabilidad de que $(M - 1)$ de los $(C - 1)$ pilotos restantes, terminen la carrera?.
- Dado que M pilotos terminan la carrera (incluido Feliceo) ¿Cuál es la probabilidad de que F. Baltazar sea el ganador?.
- Usando los resultados de las partes (b) y (c), encuentre una expresión para la probabilidad de que Feliceo gane la carrera.

- e) Finalmente, en función de los resultados de todas las partes anteriores, indique ¿Cuál es el valor esperado del beneficio que reporta a la escudería A.J Floppy contar con los servicios de Feliceo Baltazar?.

18. (*) El ingenioso equipo docente de IN44A ha decidido implementar un pionero sistema de aprendizaje del ramo, el cual se detalla a continuación.

Del total de los alumnos del curso se realiza una exigente selección luego de la cual clasifican K participantes los cuales deben ingresar a una sala-estudio donde serán sometidos a intensas clases. Dentro de los clasificados se encuentra el distinguido alumno *Tony Valero*.

En la sala-estudio al final de cada semana se realiza una prueba de conocimientos y el alumno con menor nota queda en la situación de amenazado por conocimientos. La nota de cada uno de los alumnos que están en la sala en la semana s son variables aleatorias i.i.d. de distribución exponencial de parámetro λ_s .

Luego de esta prueba se realiza una votación donde los participantes deben elegir a uno de sus compañeros para ser amenazado por razones de convivencia. En esta elección no se puede votar por el amenazado por conocimientos. Si *Tony Valero* todavía está participando en la semana s y no tuvo problemas en la prueba de conocimientos, con probabilidad p_s será amenazado por convivencia.

Una vez conocidos los dos amenazados de la semana s son sometidos a votación popular para decidir quien debe abandonar la sala, en la cual se estima que independiente de quienes sean los participantes, con probabilidad q_s el eliminado es el amenazado por conocimientos. Este procedimiento se repite por $K - 4$ semanas hasta que se conoce a los 4 finalistas.

La gran final funciona de la siguiente manera: Los finalistas son sometidos a un examen que consta de una única pregunta. Los tiempos que demoran cada uno de los finalistas en responder esta pregunta son variables aleatorias i.i.d. de distribución exponencial de parámetro μ . Además se sabe que debido a la presión a que han sido sometidos existe una probabilidad r de que la respuesta entregada sea incorrecta con lo cual el participante queda automáticamente eliminado del concurso. Luego el ganador es el primer alumno que entregue el examen resuelto correctamente, y si todos responden de manera errada el primer lugar se declara desierto. El objetivo de este problema es calcular la probabilidad que *Tony Valero* gane el concurso. Para ello se pide que responda las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es la distribución que sigue la menor de las notas en la prueba de conocimientos de la semana s ? Si *Tony Valero* está en competencia en la semana s ¿Cuál es la probabilidad de que sea el amenazado por conocimientos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que *Tony Valero* sea eliminado en la semana s ? Denote a esta probabilidad como F_s .
Hint : Note que para calcular esta probabilidad es necesario tomar en consideración lo sucedido en las $s - 1$ semanas anteriores.
- Calcule el número esperado de semanas que permanece *Tony* dentro de la sala-estudio.
- ¿Cuál es la probabilidad de que *Tony* esté entre los 4 finalistas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que *Valero* sea el ganador?

19. 6.000 ampolletas alumbran el letrero luminoso de un hotel. Cada ampolleta falla tras un tiempo aleatorio cuya duración promedio es de 3.200 horas (la duración de una ampolleta se describe bien por una distribución exponencial).

- Asumiendo que el letrero permanece encendido continuamente y las ampolletas que se queman son reemplazadas en forma inmediata, ¿Cuántos reemplazos se deben hacer anualmente en promedio?.

- b) El dueño del hotel ha decidido que para evitar que las ampolletas se quemen seguido, el reemplazará las 6000 al comienzo de cada año, además de reemplazar aquellas que se quemarán en el transcurso del año. Comente la efectividad de esta estrategia.
- c) El dueño del hotel ha pasado por un período económico crítico por lo que el año en curso no ha reemplazado ninguna de las ampolletas que se ha quemado. Él se ha percatado que más de la mitad de las ampolletas se han quemado antes de la vida útil promedio de 3.200 horas (información escrita en los envases) y decide hacer un juicio en contra de los proveedores por publicidad engañosa. ¿Cree usted que él tiene la razón?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más un 10% de las ampolletas estén quemadas al final del año? (suponga que no son reemplazadas cuando se queman).
20. Usted ha sido designado para escoger la política óptima de reemplazo de automóviles de una conocida escudería de Fórmula I. Es decir, usted debe escoger cada cuánto tiempo se debe comprar un nuevo vehículo. Sus jefes le han dicho que debe considerar lo siguiente:
- La vida útil de un automóvil se distribuye exponencialmente con tasa λ [fallas/año].
- Existe un costo de reemplazo planificado C_1 del vehículo, que constituye el costo de la inversión.
- Si el vehículo falla de manera no planificada, se debe pagar la inversión anterior, pero además existe un costo adicional debido a la pérdida de la carrera. El monto total es C_2 y se sabe que es mayor a C_1 .
- Horizonte de tiempo es muy, muy largo
- a) Determine el período de reemplazo planificado óptimo.
- b) Suponga que el tomador de decisiones desea plantear un modelo más realista, por lo que decide considerar una función de costo de operación CO_t creciente con la edad de la máquina (t). Además, considera incorporar un valor residual del automóvil VR_t , decreciente en t . Este valor residual se obtiene de la venta de la máquina, sólo al ser retirada en forma planificada. Formule el modelo que permita determinar el nuevo período de reemplazo planificado óptimo.
- c) Ahora se desea estudiar el contrato de un seguro contra fallas. La idea es pagar una cuota o prima S a la compañía aseguradora cada año, de modo que ésta cubra completamente los costos debido a la falla, es decir, cada vez que la máquina falla, la compañía de seguros realiza un pago de C_2 . ¿Cuánto es lo máximo que estaría dispuesto a pagar por la prima?
21. Considere un avión con K asientos disponibles, los cuales comienzan a ser vendidos 2 meses antes de la salida del vuelo. El dueño del avión ha notado que cada pasajeros que ha comprado un pasaje, no se presenta al vuelo con un probabilidad q , por lo que lo ha decidido realizar *overbooking* (es decir, vender más asientos que la capacidad). Hay un solo tipo de pasajero que paga un precio P y el número de pasajeros que compra pasajes se distribuye poisson (λ) (no se realizan devoluciones a pasajeros que no se presenten al vuelo). Adicionalmente se sabe que un pasajero que aborda el avión gastará una cantidad de dinero aleatoria X en términos de souvenirs, donde X se distribuye de acuerdo a una función $f(X)$. El dueño sabe que si N pasajeros que han comprado un pasaje no puede abordar la compañía incurrirá en un costo $C(N)$ por pasajero, con $C'(N) < 0$.
- a) Plantee el problema de maximización de beneficios esperados que enfrenta el dueño de la aviación (Esto es, identifique las componentes de la utilidad y las variables de decisión). Entregue una intuición del Trade-off existente.
- b) Encuentre los ingresos esperados considerando V como dado.
- c) Encuentre los costos esperados de operar con una política de overbooking de V asientos. Para esto siga, si lo desea, los siguientes pasos:
- Encuentre la probabilidad de dejar n personas abajo dado que se vendieron X pasajes, ($X = K + V$).

- Ocupando probabilidades totales, encuentre la probabilidad de dejar n personas abajo.
- Considerando lo anterior y los costos $C(N)$, calcule los costos esperados.

2. Resolución problemas de probabilidades

- 1. Hay que demostrar que:

$$P[x > s + t | x > s] = P[x > t]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P[x > s + t | x > s] &= \frac{P[x > s + t \wedge x > s]}{P[x > s]} \\ &= \frac{P[x > s + t]}{P[x > s]} \\ &= \frac{1 - P[x \leq s + t]}{1 - P[x \leq s]} \\ &= \frac{1 - [1 - e^{-\lambda(s+t)}]}{1 - [1 - e^{-\lambda(s)}]} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda(s)}} \\ &= e^{-\lambda t} \\ &= P[x \geq t] \end{aligned}$$

- 2. Veamos el caso para $n=2$:

$$\begin{aligned} P[X_1 + X_2 = N] &= \sum_{i=0}^{\infty} P[X_1 + X_2 = N | X_2 = i] \cdot P[X_2 = i] \\ &= \sum_{i=0}^N P[X_1 = N - i] \cdot P[X_2 = i] \\ &= \sum_{i=0}^N \frac{\lambda_1^{N-i} e^{-\lambda_1}}{(N-i)!} \cdot \frac{\lambda_2^i e^{-\lambda_2}}{i!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{N!} \cdot \sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)! i!} \lambda_1^{N-i} \lambda_2^i \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^N}{N!} \end{aligned}$$

- 3. Tenemos que:

$$\begin{aligned} P[t_1 < t_2] &= \int_0^{\infty} P[t_1 < t_2 | t_2 = t] \cdot f_{t_2}(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} P[t_1 < t] \cdot \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda t}) \cdot \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu t} dt - \int_0^{\infty} \mu e^{-(\mu + \lambda)t} dt \\ &= 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \cdot \int_0^{\infty} (\mu + \lambda) e^{-(\mu + \lambda)t} dt \\ &= 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \\ &= \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \end{aligned}$$

- 4. Debemos encontrar una expresión para:

$$P[X = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} < t]$$

$$\begin{aligned} P[X < t] &= 1 - P[X > t] \\ &= 1 - (P[X_1 > t] \cdot P[X_2 > t] \dots \cdot P[X_n > t]) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(t)) \end{aligned}$$

Para el caso exponencial tenemos que:

$$\begin{aligned} P[X < t] &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(t)) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n 1 - 1 + e^{-\lambda t} \\ &= 1 - e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda t)} \\ &= 1 - e^{-n\lambda t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X \rightsquigarrow \exp(n\lambda)$$

- 5. Sea t_a el tiempo que transcurre hasta que el primer cliente se va del banco. De acuerdo a esto, tenemos que: $t_a = \min\{t_1, t_2\}$ donde t_1 y t_2 son los tiempos de atención en la primera y segunda caja respectivamente. Entonces, dado que la distribución del mínimo entre dos exponenciales es una exponencial de la suma de las tasas, se tiene que $t_a \rightsquigarrow EXP(\mu + \lambda)$.
- 6. Esto es que el equipo A haga exactamente 3 goles y el equipo B haga exactamente 4 goles. Ahora, dado que los goles hechos por un equipo son independientes de los goles que hace el otro equipo, se tiene que:

$$P[\text{Serie termina 4-3}] = P[\text{B hace 4 goles}] \cdot P[\text{A hace 3 goles}] = \binom{5}{4} q^4 (1-q) \cdot \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2$$

- 7. Para que se suban exactamente k personas, dada la pérdida de memoria de la exponencial, tiene que suceder que la exponencial de μ le debe ganar a la exponencial de λ en k ocasiones y luego perder. La probabilidad asociado a esto es:

$$P[\text{Suben exactamente } k \text{ personas}] = \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda}\right)^k \cdot \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

- 8. Definamos las siguientes variables:

H = estudiante es hombre.

M = estudiante es mujer.

I = estudiante está invicto.

NI = estudiante no está invicto.

Luego la probabilidad pedida es : $P(H|NI) = \frac{P(NI|H)P(H)}{P(NI)}$

Reconociendo términos, se tiene que:

$$P(NI|H) = t$$

$$P(H) = p$$

$$P(NI) = P(NI|H)P(H) + P(NI|M)P(M) = t \cdot p + r \cdot (1-p)$$

Finalmente :

$$P(H|NI) = \frac{t \cdot p}{t \cdot p + r \cdot (1-p)}$$

- 9. Sea \mathbf{A}_i el suceso que la carta i es introducido en el sobre correcto $i = 1, 2, \dots, n$ y se determinará el valor de \mathbf{P}_n como $\mathbf{P}_n = Pr(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{A}_i)$ utilizando el siguiente procedimiento:

Primero se suman las probabilidades de los n procesos individuales. Luego, se resta la suma de las intersecciones de todos los pares posibles del proceso (los que serán $\binom{n}{2}$), luego se suman la suma de las intersecciones de grupos de tres eventos (de los cuales hay $\frac{n}{3}$) y así hasta que finalmente se suma o se resta la probabilidad de los n sucesos, dependiendo si n es un número impar o par, es decir, el último término será: $(-1)^{(n+1)} Pr(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$

La idea es que si introduzco bien una carta y tengo un número par de éstas (n par), necesariamente voy a poner bien otra carta y por eso esas probabilidades se restan. Esto porque:

$$\begin{aligned} Pr(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \mathbf{A}_3) &= Pr(\mathbf{A}_1) + Pr(\mathbf{A}_2) + Pr(\mathbf{A}_3) - [Pr(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2) + Pr(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_3) + Pr(\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3)] \\ &\quad + Pr(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3) \end{aligned}$$

Entonces si sabemos $Pr(\mathbf{A}_i)$ de que una carta sea introducida en el sobre correcto es $\frac{1}{n}$ por lo que:

- $\sum_{i=1}^n Pr(\mathbf{A}_i) = n \frac{1}{n} = 1$
- $\sum_{i < j} Pr(\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j) = \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!}$
- $\sum_{i < j < k} Pr(\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k) = \binom{n}{3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{3!}$
- $\mathbf{P}_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{(n+1)} \frac{1}{n!}$

Además, si n tiende a infinito, esta serie converge a $1 - (\frac{1}{e})$ por lo que $\mathbf{P}_n = 0,63212$

■ 10. Sean:

R = Veo primero un lado rojo
 RR = La carta es roja-roja
 NR = La carta es roja-negra
 NN = La carta es negra-negra

Dada esta notación se pide:

$$\begin{aligned}
 P[NR|R] &= \frac{P[R|NR] \cdot P[NR]}{P[R]} \\
 &= \frac{P[R|NR] \cdot P[NR]}{P[R|NN] \cdot P[NN] + P[R|NR] \cdot P[NR] + P[R|RR] \cdot P[RR]} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

■ 11. Sean:

S = el alumno sabe la respuesta correcta
 C = el alumno respondió correctamente

Bajo esta notación lo que nos preguntan no es más que:

$$\begin{aligned}
 P[S|C] &= \frac{P[C|S] \cdot P[S]}{P[C]} \\
 &= \frac{P[C|S] \cdot P[S]}{P[C|S] \cdot P[S] + P[C|\bar{S}] \cdot P[\bar{S}]} \\
 &= \frac{p}{p + (1-p)\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

■ 12. Sabemos que $Log(X) \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$. Por otro lado sabemos que la generadora de momentos de una normal es:

$$\Psi(v) = \exp\left(\frac{\sigma^2 v^2}{2} + \mu \cdot v\right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 E(e^{v \cdot y}) &= \exp\left(\frac{\sigma^2 v^2}{2} + \mu \cdot v\right) \\
 E((e^Y)^v) &= \exp\left(\frac{\sigma^2 v^2}{2} + \mu \cdot v\right) \\
 E(X^v) &= \exp\left(\frac{\sigma^2 v^2}{2} + \mu \cdot v\right)
 \end{aligned}$$

Entonces es directo ver que:

$$\begin{aligned} E(X) &= \Psi(1) \\ VAR(X) &= \Psi(2) - \Psi(1)^2 \end{aligned}$$

- 13. a) $P(\text{veleros funcionando día siguiente}) = P(\text{No falle ninguno}) + P(\text{Falle sólo 1})$

$$P(\text{veleros funcionando día siguiente}) = (1-p)^3 + 3 \cdot p \cdot (1-p)^2$$

- b) $P(\text{sólo 2 funcionando}) = P(\text{Los dos activos fallen}) = p^2$

- c) Ahora debemos analizar caso a caso:

- Si $C \leq X < N \Rightarrow$

$$P(X \text{ veleros disponibles}) = P(\text{Fallen exactamente } N-C+X \text{ veleros})$$

$$P(X \text{ veleros disponibles}) = \frac{N!}{(N-X+C)! \cdot (X+C)!} \cdot p^{N-X+C} \cdot (1-p)^{X-C}$$

- Si $C = N \Rightarrow$

$$P(X \text{ veleros disponibles}) = \sum_{i=0}^C \frac{N!}{(N-i)! \cdot i!} \cdot p^i \cdot (1-p)^{N-i}$$

- Para otro valor de $X \Rightarrow$

$$P(X \text{ veleros disponibles}) = 0$$

- 14. a) Dado que la esperanza de una exponencial es el inverso multiplicativo del parámetro, una persona racional que no le guste esperar elegiría la fila 1 porque $\lambda > \mu$.

- b) Dado que elegí la ventanilla 1, existen 2 configuraciones en la que me voy último:

- Se vaya primero el de la otra fila $\left(P_1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$.
- Se vaya primero el de mi fila y además el de la otra fila se vaya antes que yo $\left(P_2 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

Entonces, la probabilidad es:

$$P(\text{irse último}) = P_1 + P_2$$

- c) Llamemos a las personas que están en la fila 1 como a y b (a antes que b) y a la persona atendándose en la fila 2 como c . Con esto, existen 3 configuraciones posibles para que yo me vaya último:

- $a \rightarrow b \rightarrow c$ $P_1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2$
- $a \rightarrow c \rightarrow b$ $P_2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2 \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu}$
- $c \rightarrow a \rightarrow b$ $P_3 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2 \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

Finalmente, la probabilidad buscada es:

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

■ 15. Sean las variables:

R = Respuesta correcta a la pregunta.
 A_1 = Respuesta dada por el ayudante 1 a la pregunta.
 A_2 = Respuesta dada por el ayudante 2 a la pregunta.

Tenemos que calcular:

$$P(R = d | A_1 = d \wedge A_2 = d) = \frac{P(A_1 = d \wedge A_2 = d | R = d) \cdot P(R = d)}{P(A_1 = d \wedge A_2 = d)}$$

Pero

$$\begin{aligned}
 P(A_1 = d \wedge A_2 = d | R = d) &= P(A_1 \text{ diga la verdad}) \cdot P(A_2 \text{ diga la verdad}) \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \\
 P(R = d) &= \frac{1}{9} \\
 P(A_1 = d \wedge A_2 = d) &= \sum_{r=a}^i P(A_1 = d \wedge A_2 = d | R = r) \cdot P(R = r) \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{9} + \sum_{\substack{r=a \\ i \neq d}}^r \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 P(R = d | A_1 = d \wedge A_2 = d) &= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{1440} + \frac{1}{15}} \\
 &= \frac{96}{97}
 \end{aligned}$$

■ 16. a) Si cobro 0 por la entrada la probabilidad que un habitante en particular asista al estadio será 1. Esto implica que tendré un estadio lleno pero sin ganancias.

Si cobro un precio muy alto la probabilidad será cercana a 0 por lo que tampoco tendré ganancias (dado que no irá gente).

El trade-off es, precio muy alto implica más ganancias por persona pero menos asistencias.

b) Si cobro un precio p cada persona asistirá con probabilidad e^{-p} , entonces, sea X la cantidad de personas que asisten al estadio:

$$P[X = k] = \frac{N!}{k! \cdot (N - k)!} e^{-pk} (1 - e^{-p})^{N-k}$$

Claramente esto cobra sentido sólo para valores de $k \leq N$.

- c) Dado que la asistencia al estadio sigue una binomial se tendrá que el ingreso esperado será la esperanza de la binomial por el precio cobrado. Esto es:

$$E_p[\text{Ingresos}] = N \cdot e^{-p} \cdot p$$

- d) Para lograr esto debemos derivar e igualar a 0 (cuidando que el precio no sea negativo):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p[\text{Ingresos}]}{\partial p} &= N \cdot e^{-p} N \cdot e^{-p} \cdot p = 0 \\ &\Rightarrow P = 1 \end{aligned}$$

De esta forma el ingreso máximo será entonces:

$$E_{p^*}[\text{Ingresos}] = N \cdot e^{-1}$$

- 17. a) Para lograr dar k vueltas sin chocar es necesario que cada una de esas vueltas no resulten en un choque. Dado que la probabilidad de no chocar en una vuelta x es independiente de todo lo demás, se tendrá que:

$$P[\text{Dar más de k vueltas}] = (1 - q)^k$$

De esta forma, la probabilidad de terminar la carrera será:

$$P[\text{Dar V vueltas sin chocar}] = (1 - q)^V$$

- b) Sin considerar a Feliceo, la probabilidad que $(M - 1)$ pilotos terminen la carrera, será:

$$P[\text{Terminen (M-1) de (C-1)}] = \binom{C-1}{M-1} ((1 - q_1)^V)^{M-1} (1 - (1 - q_1)^V)^{C-M}$$

- c) Utilizando un resultado conocido:

$$P[\text{Gane Feliceo | M}] = P[\text{Exp}(\mu) \text{ le gane a } \text{mínimo de M-1 Exp}[\lambda]] = \frac{\mu}{\mu + (M - 1)\lambda}$$

- d) Siguiendo la indicación del enunciado:

$$\begin{aligned} P[\text{Feliceo gane}] &= P[\text{Gane Feliceo} | \text{llega}] P[\text{llega}] + P[\text{Gane Feliceo} | \text{No llega}] P[\text{No llega}] \\ &= P[\text{Gane Feliceo} | \text{llega}] (1 - q_2)^V + 0 \\ &= (1 - q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^C P[\text{Gane Feliceo} | \text{llega}] [\text{llegan otros M - 1}] P[\text{llegan otros M - 1}] \\ &= (1 - q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^C \frac{\mu}{\mu + (M - 1)\lambda} \binom{C-1}{M-1} ((1 - q_1)^V)^{M-1} (1 - (1 - q_1)^V)^{C-M} \end{aligned}$$

- e) Notemos que:

$$\begin{aligned} E[\text{Utilidades}] &= E[\text{U(Ganar)}] + E[\text{U(Terminar)}] - E[\text{U(Chocar)}] \\ &= W \cdot (1 - q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^C \frac{\mu}{\mu + (M - 1)\lambda} \binom{C-1}{M-1} ((1 - q_1)^V)^{M-1} (1 - (1 - q_1)^V)^{C-M} \\ &\quad + T \cdot (1 - q_2)^V - R \cdot (1 - (1 - q_2)^V) \end{aligned}$$

- 18. a) La nota de cada uno de los alumnos (n_i) sigue una exponencial de parámetro λ_s y en la semana s quedan $K - s + 1$ participantes. Como vimos en la clase auxiliar 1 la distribución del mínimo M variables aleatorias exponenciales es una exponencial que tiene como parámetro la suma de los parámetros de las M variables aleatorias originales. Aplicando lo anterior a este caso se tiene que:

$$\min(n_1, n_2, \dots, n_{(K-s+1)}) \rightsquigarrow \exp((K - s + 1) \cdot \lambda_s)$$

La probabilidad de que Tony Valero sea el amenazado por conocimientos de la semana s es igual a la probabilidad de que su nota sea la menor de entre los $(K - s + 1)$ participantes. Dado que su nota ($\exp(\lambda_s)$) compite con otra la peor del resto ($\exp((K - s) \cdot \lambda_s)$), nuevamente utilizamos un resultado visto en la clase auxiliar 1. Denotando a esta probabilidad por a_s se tiene que:

$$a_s = P(\text{Nota de Tony} < \text{Todas las demás notas}) = \frac{\lambda_s}{(K - s + 1) \cdot \lambda_s} = \frac{1}{K - s + 1}$$

Otra forma de justificar este resultado es decir que dado que todos los participantes tienen la misma distribución para su nota es igualmente probable que cualquiera de ellos resulte amenazado. Por esto la probabilidad que cualquiera de ellos sea amenazado, en particular para Valero, es la misma, es decir:

$$a_s = \frac{1}{K - s + 1}$$

- b) La probabilidad de que Tony sea el eliminado de la semana s esta condicionado a lo sucedido en las $s - 1$ semanas anteriores. Para ello definamos el siguiente evento:
 B_{s-1} = Valero no ha sido eliminado en las $s - 1$ primeras semanas.
 Condicionanado sobre este evento se tiene que:

$$F_s = (F_s|B_{s-1}) \cdot P(B_{s-1}) + (F_s|\sim B_{s-1}) \cdot P(\sim B_{s-1})$$

$$F_s = (F_s|B_{s-1}) \cdot P(B_{s-1}) + 0$$

La probabilidad que nuestro protagonista sea el eliminado en la semana s dado que todavía está en competencia, está dada por la probabilidad de que sea el amenazado por conocimientos y el eliminado sea el amenazado por conocimientos o que sea no sea el amenazado por conocimientos, sea amenazado por convivencia y el eliminado sea el amenazado por convivencia. Esto es:

$$(F_s|B_{s-1}) = a_s \cdot q_s + (1 - a_s) \cdot p_s \cdot (1 - q_s)$$

Por otro lado para no ser eliminado en las primeras $s - 1$ semanas se tiene que dar en cada una de dichas semanas uno de los siguientes eventos:

- No ser amenazado por conocimientos, ni por convivencia
- Ser amenazado por conocimientos y el eliminado sea el amenazado por convivencia.
- Ser amenazado por convivencia y el eliminado sea el amenazado por conocimientos.

Luego :

$$P(B_{s-1}) = \prod_{i=1}^{s-1} P[\text{No ser eliminado la semana } i]$$

$$= \prod_{i=1}^{s-1} [(1 - a_i) \cdot (1 - p_i) + a_i \cdot (1 - q_i) + (1 - a_i) \cdot p_i \cdot q_i]$$

o utilizando el resultado de la parte anterior:

$$P(B_{s-1}) = \prod_{i=1}^{s-1} (1 - (F_i|B_{i-1}))$$

Finalmente:

$$F_s = [a_s \cdot q_s + (1 - a_s) \cdot p_s \cdot (1 - q_s)] \cdot \prod_{i=1}^{s-1} [(1 - a_i) \cdot (1 - p_i) + a_i \cdot (1 - q_i) + (1 - a_i) \cdot p_i \cdot q_i]$$

c) Sea N el número de semanas dentro de la sala-estudio luego la esperanza viene dada por:

$$E(N) = \sum_{j=1}^{K-4} E(N|\text{Es eliminado en } j) \cdot P(\text{Es eliminado en } j) = \left(\sum_{j=1}^{K-4} j \cdot F_j \right)$$

d) Utilizando el resultado de la parte 2, se tiene que :

$$P(\text{ser finalista}) = P(B_{K-4}) = \prod_{i=1}^{K-4} [(1 - a_i) \cdot (1 - p_i) + a_i \cdot (1 - q_i) + (1 - a_i) \cdot p_i \cdot q_i]$$

e) La probabilidad de ser el ganador depende de si Valero está o no entre los finalistas concurso. Condicionando sobre este evento:

$$P(\text{ganar}) = P(\text{ganar}|\text{es finalista}) \cdot P(\text{es finalista}) + P(\text{ganar}|\text{no es finalista}) \cdot P(\text{no es finalista})$$

$$P(\text{ganar}) = P(\text{ganar}|\text{es finalista}) \cdot P(\text{es finalista}) + 0$$

La probabilidad de ser finalista fue calculada en la parte 4. La probabilidad de ganar dado que está en la final se calcula de la siguiente manera. Definamos la variable t_i como el tiempo que demora el alumno i en terminar el examen.

Para ser el ganador se pueden dar las siguientes situaciones:

- Ser el primero en terminar y contestar correctamente :

$$P_1 = P(t_{Tony} < \text{resto de los } t_i) \cdot P(\text{conteste bien}) = \frac{\mu}{4 \cdot \mu} \cdot (1 - r) = \frac{1}{4} \cdot (1 - r)$$

- Ser el segundo en terminar, que el primero responda mal y Valero bien :

$$P_2 = \frac{3 \cdot \mu}{4 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{\mu}{3 \cdot \mu} \cdot (1 - r) = \frac{1}{4} \cdot r \cdot (1 - r)$$

- Ser el tercero en terminar, que los dos primeros repongan mal y Valero bien :

$$P_3 = \frac{3 \cdot \mu}{4 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{2 \cdot \mu}{3 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{\mu}{2 \cdot \mu} \cdot (1 - r) = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot (1 - r)$$

- Ser el último en terminar, que los 3 primeros respondan mal y Valero bien:

$$P_4 = \frac{3 \cdot \mu}{4 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{2 \cdot \mu}{3 \cdot \mu} \cdot r \cdot \frac{\mu}{2 \cdot \mu} \cdot r \cdot (1 - r) = \frac{1}{4} \cdot r^3 \cdot (1 - r)$$

Notemos que para la obtención de cada uno de estos resultados hemos utilizado 3 resultados conocidos:

- La distribución del menor tiempo de respuesta entre i alumnos se distribuye $\exp(i \cdot \lambda)$.
- La prob que una $\exp(\lambda_s)$ sea menor que una $\exp(i \cdot \lambda_s)$ es $\frac{\lambda_s}{\lambda_s + i \cdot \lambda_s}$
- La perdida de memoria de la exponencial. Esto es, cada vez que un alumno termina de contestar y lo hace mal, todas las distribuciones se reinician y las exponenciales compiten desde 0 nuevamente.

Los dos primeros resultados pueden ser reemplazados por el argumento de equiprobabilidad en el termino de la prueba, pero la perdida de memoria es un resultado crucial. Luego:

$$P(\text{ganar}|\text{es finalista}) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

Finalmente:

$$P(\text{ganar}) = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \cdot \prod_{i=1}^{K-4} [(1 - a_i) \cdot (1 - p_i) + a_i \cdot (1 - q_i) + (1 - a_i) \cdot p_i \cdot q_i]$$